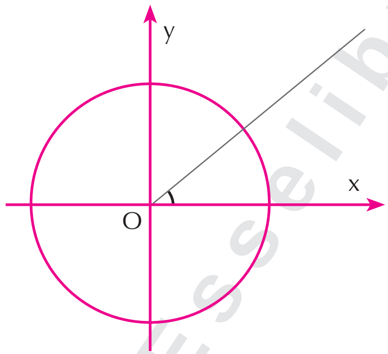
1.2. Risoluzione di triangoli qualsiasi

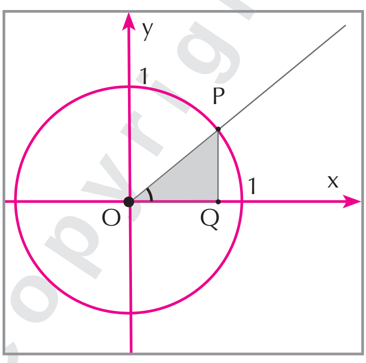
In questo paragrafo estenderemo le funzioni goniometriche anche ad angoli retti ed ottusi, per potere risolvere triangoli qualsiasi.
Per fare ciò ovviamente vogliamo generalizzare le definizioni precedenti in modo che esse continuino a valere anche per gli angoli acuti, comprendendo così anche i risultati ottenuti.

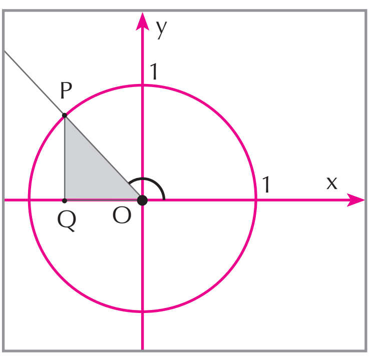
Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e in esso la circonferenza di centro nell'origine e raggio unitario.

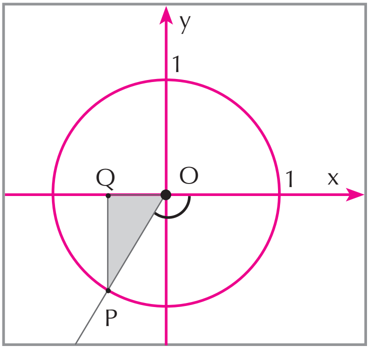


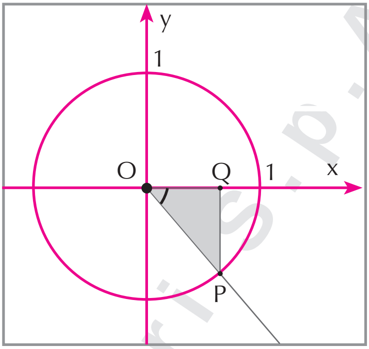
Abbiamo tracciato anche un angolo con vertice nell'origine e un lato coincidente con il semiasse positivo delle ascisse. Questo angolo può perciò assumere ogni valore compreso tra 0° e 360°.

Adesso costruiamo un triangolo rettangolo.







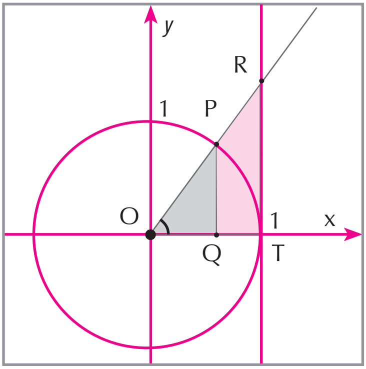


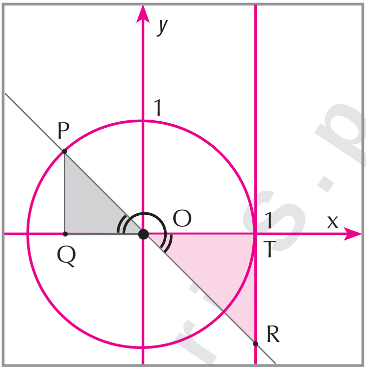
Come si vede, al variare del punto *P* e quindi dell'angolo di vertice *O*, abbiamo sempre un triangolo rettangolo di ipotenusa unitaria. Per questo triangolo sappiamo definire le nozioni di seno e di coseno come rapporto fra cateto e ipotenusa. Dato che siamo in un riferimento cartesiano considereremo non il rapporto fra le misure dei lati, bensì fra le ascisse o ordinate.
In particolare poniamo le seguenti definizioni.

Diciamo **circonferenza goniometrica** la circonferenza di centro nell'origine e raggio unitario.

Data una circonferenza goniometrica conveniamo di rappresentare gli angoli con il vertice nell'origine degli assi e un lato coincidente con il semiasse positivo delle ascisse.
Allora diremo **seno** dell'angolo così determinato l'ordinata del punto intersezione fra il lato variabile dell'angolo e la circonferenza goniometrica. L'ascissa di detto punto la chiameremo **coseno** dell'angolo.

Come immediata conseguenza della precedente definizione vi è il fatto che il seno di angoli maggiori di 180° è un numero negativo e quello degli angoli di 0° e 180° è nullo. Per lo stesso motivo il massimo valore del seno si ha per un angolo di 90° per cui sen(90°) = 1, mentre il minimo si ha per un angolo di 270° per cui sen(270°) = – 1. Analogamente il coseno di angoli compresi tra 90° e 270° è un numero negativo, inoltre cos(90°) = cos(270°) = 0, cos(0°) = 1, cos(180°) = – 1.
Cerchiamo adesso di definire anche le altre quattro funzioni per angoli non acuti. Cominciamo con la tangente. Consideriamo la figura.





Abbiamo tracciato la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto di ascissa 1, tale retta quasi sempre incontra il lato dell'angolo nel punto R, formando così il triangolo OTR visualizzato. Non è difficile vedere che questo triangolo è simile al triangolo OQP e perciò vale la seguente relazione:

$$\frac{\overline{RT}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \tan\left(P\hat{O}Q\right)$$

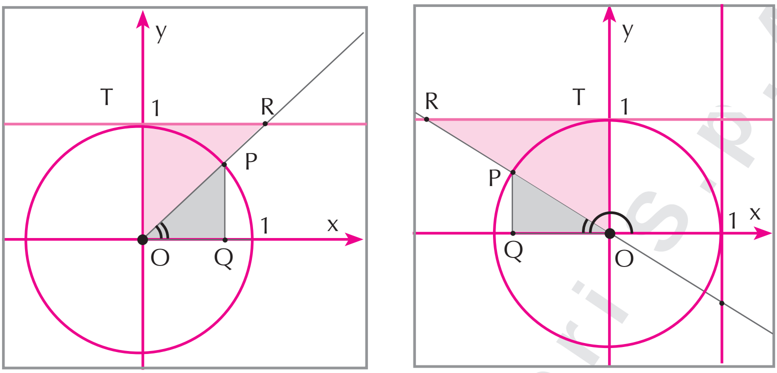
Pertanto possiamo definire la tangente di un angolo anche non acuto.

Diremo **tangente** di un angolo l'ordinata del punto intersezione, se esiste, fra il lato variabile dell'angolo e la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel suo punto di ascissa 1.

Come immediata conseguenza della precedente definizione vi è il fatto che non hanno alcun significato le scritte tan(90°) e tan(270°), perché in questo caso non esiste il punto intersezione, essendo le rette in questione fra loro parallele. Altrettanto facilmente si capisce che la tangente è un numero positivo per angoli acuti e per angoli compresi tra 180° e 270°. Inoltre si ha:

$$\tan(\alpha) = \tan(180° + \alpha), \forall\alpha \neq 90°,\ 0 \leq \alpha \leq 180°$$

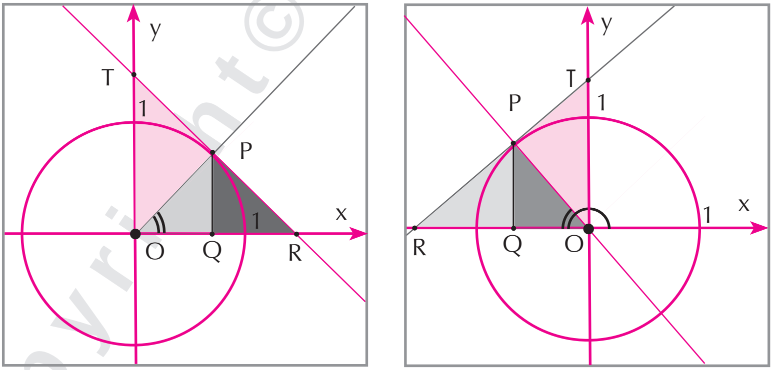
Definiamo analogamente la cotangente, con riferimento alla seguente figura.



Diremo **cotangente** di un angolo l'ascissa del punto intersezione, se esiste, fra il lato variabile dell'angolo e la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel suo punto di ordinata 1.

Quindi non hanno significato le scritte cot(0°) e cot(180°).

Per la secante e la cosecante consideriamo la seguente figura.



Diremo **secante** di un angolo l'ascissa del punto intersezione, se esiste, fra l'asse delle ascisse e la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto che individua l'angolo.

Diremo **cosecante** di un angolo l'ordinata del punto intersezione, se esiste, fra l'asse delle ordinate e la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto che individua l'angolo.

Ovviamente, non hanno senso le scritte sec(90°), sec(270°), csc(0°) e csc(90°).
Adesso possiamo cercare di risolvere triangoli anche non rettangoli. Dobbiamo però stabilire quanti enti geometrici dobbiamo conoscere per potere risolvere un triangolo. La risposta ce la forniscono i 3 criteri di isometria dei triangoli, che qui ricordiamo.

1° criterio di isometria dei triangoli LAL. Due triangoli che hanno ordinatamente isometrici due lati e l'angolo da essi compreso sono fra loro isometrici.

2° criterio di isometria dei triangoli ALA. Due triangoli che hanno ordinatamente isometrici due angoli e il lato a essi adiacente sono fra loro isometrici.

3° criterio di isometria dei triangoli LLL. Due triangoli che hanno ordinatamente isometrici i tre lati sono fra loro isometrici.

Quindi possiamo risolvere solo triangoli di cui conosciamo 2 lati e l'angolo compreso, due angoli e un lato oppure i tre lati. In particolare, il criterio ALA in effetti vale anche se gli angoli noti non sono adiacenti al lato, perché conoscendo due angoli di un triangolo conosciamo anche il terzo, supplementare alla somma degli altri. Inoltre, il criterio LLL è ovviamente soggetto alla validità della disuguaglianza triangolare, ossia ciascuno dei lati deve essere minore della somma degli altri.

Per trovare delle proprietà che si servono della trigonometria per risolvere i triangoli nelle ipotesi dei tre criteri di isometria, dobbiamo cercare di riferirci alle proprietà sui triangoli rettangoli che già conosciamo. Ci proponiamo di dimostrare il seguente risultato.

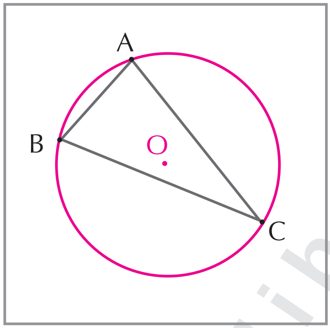
TEOREMA 9 (Teorema della corda) • *In un triangolo un lato è isometrico al prodotto del diametro della circonferenza circoscritta al triangolo per il seno dell'angolo opposto al detto lato.*

In simboli:

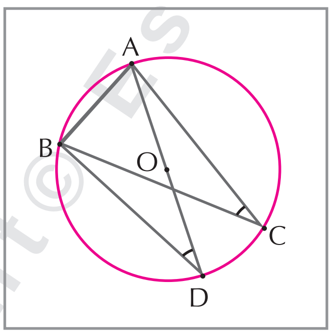
$$a = 2R \cdot \text{sen}(\alpha); b = 2R \cdot \text{sen}(\beta); c = 2R \cdot \text{sen}(\gamma)$$

DIMOSTRAZIONE

Ci riferiamo alla seguente figura:



Abbiamo tracciato la circonferenza circoscritta al triangolo, che sappiamo sempre esistere. Gli assi dei lati si incontrano nel circocentro della circonferenza. Adesso tracciamo il diametro *AD* e costruiamo il triangolo *ABD*.



Si ha $\angle A\hat{C}B = \angle A\hat{D}B$, perché sono angoli alla circonferenza che insistono sulla stessa corda *AB*. Inoltre:

$$\overline{AB} = AD \cdot \text{sen}\left(A\hat{D}B\right)$$

perché il triangolo *ABD* è iscritto in una semicirconferenza, pertanto è retto di ipotenusa *AD*. Infine, per la precedente uguaglianza degli angoli, sarà anche:

$$\overline{AB} = AD \cdot \text{sen}\left(A\hat{C}B\right)$$

che è la tesi.

Una immediata conseguenza di questo teorema è il seguente corollario.

COROLLARIO 1 • *Il raggio R del cerchio circoscritto a un triangolo è:*

- *la metà del rapporto fra la misura di un lato e quella del seno dell'angolo a esso opposto*:

$$R = \frac{a}{2 \cdot \text{sen}(\alpha)} = \frac{b}{2 \cdot \text{sen}(\beta)} = \frac{c}{2 \cdot \text{sen}(\gamma)}$$

- *la quarta parte del rapporto fra il prodotto delle misure dei tre lati e quella dell'area*:

$$R = \frac{1}{4} \cdot \frac{abc}{A}$$

Un'altra immediata e importantissima conseguenza del **Teorema della corda** è la seguente.

DIMOSTRAZIONE

Proviamo solo il secondo risultato, essendo il primo immediato.

Dalla formula per l'area di un triangolo di lati *a* e *b*, $A = \frac{1}{2} ab \, \text{sen}(\gamma)$, otteniamo $\frac{2A}{ab} = \text{sen}(\gamma)$. Sostituendo questa espressione nella terza espressione del primo corollario abbiamo:

$$R = \frac{c}{2 \cdot \text{sen}(\gamma)} = \frac{c}{2 \cdot \frac{2A}{ab}} = \frac{abc}{4A}$$

COROLLARIO 2 (Teorema dei seni) • *In un triangolo il rapporto fra la misura di un lato e quella del seno dell'angolo a esso opposto è costante, essendo uguale al diametro della circonferenza circoscritta al triangolo.*

Simbolicamente possiamo indicare il ***Teorema dei seni*** *in questo modo:*

$$\frac{a}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{\text{sen}(\gamma)} = 2R$$

La precedente espressione rappresenta 3 diverse uguaglianze, che in matematica si chiamano proporzioni:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)}=\frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)};\ \frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)}=\frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)};\ \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)}=\frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)}$$

Ciò significa che mediante due di queste proporzioni possiamo risolvere dei triangoli, in particolare dalla prima proporzione, possiamo trovare un lato conoscendone un altro e i seni degli angoli opposti ai due lati, per esempio:

$$a=\frac{b\cdot\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)}$$

oppure un angolo conoscendo il lato opposto, un altro lato e il suo angolo opposto, per esempio:

$$\alpha=\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{a\cdot\operatorname{sen}(\beta)}{b}\right)$$

Per quanto riguarda la prima uguaglianza non ci sono problemi, anche perché concorda perfettamente con il criterio ALA, qualche dubbio invece c'è per la seconda poiché non conosciamo un criterio ALL, cioè un criterio con il quale si possa costruire un triangolo di cui sono noti due lati e un angolo opposto a uno dei due. Ma vediamo intanto un esempio sulla prima uguaglianza.

ESEMPIO

Vogliamo risolvere un triangolo di cui conosciamo le misure di un lato, 12, e di due angoli, 43° e 51°, il primo dei quali opposto al lato noto.
Mediante il **Teorema dei seni** possiamo scrivere:

$$\frac{x}{\operatorname{sen}(51°)}=\frac{12}{\operatorname{sen}(43°)}\Rightarrow x=\frac{12\cdot\operatorname{sen}(51°)}{\operatorname{sen}(43°)}\approx 13,67$$

Osserviamo che, ovviamente, x è più lungo del lato noto perché opposto a un angolo maggiore di quello opposto al detto lato. A questo punto possiamo determinare la misura del terzo lato, dato che facilmente troviamo quella del terzo angolo, 180° – (43° + 51°) = 86°:

$$\frac{x}{\operatorname{sen}(86°)}=\frac{12}{\operatorname{sen}(43°)}\Rightarrow x=\frac{12\cdot\operatorname{sen}(86°)}{\operatorname{sen}(43°)}\approx 17,55$$

Osserviamo che questo è ovviamente il lato più lungo. Avremmo potuto calcolare questo lato anche con quest'altra proporzione:

$$\frac{x}{\operatorname{sen}(86°)}=\frac{13,67}{\operatorname{sen}(51°)}$$

Solo che il dato 13,67 è approssimato, pertanto l'approssimazione su x sarebbe maggiore che nel caso precedente in cui abbiamo usato valori esatti.

Torniamo adesso alla espressione ottenuta dal teorema dei seni:

$$\alpha = \text{sen}^{-1}\left(\frac{a \cdot \text{sen}(\beta)}{b}\right)$$

Nonostante non ci sia un criterio ALL, abbiamo trovato ugualmente una formula per risolvere il triangolo in queste ipotesi. Dobbiamo però chiederci se questa è una formula sempre valida come la precedente. E la risposta è ovviamente no. Infatti nessuno dice che sia sempre $\frac{a \cdot \text{sen}(\beta)}{b} \le 1$. In questo caso ovviamente non ci sarebbe l'angolo, quindi il triangolo.

ESEMPIO

Vogliamo risolvere un triangolo di cui conosciamo le misure di due lati, 15 e 18, e dell'angolo opposto al lato minore, 95°.

Applichiamo la formula precedente: $\text{sen}^{-1}\left(\frac{18 \cdot \text{sen}(95°)}{15}\right) \approx \text{sen}^{-1}(1{,}19)$.

Ovviamente l'angolo non c'è, essendo l'argomento maggiore di 1. In effetti potevamo subito osservare, senza alcun bisogno della trigonometria, che il triangolo non poteva esistere. Infatti essendo 18 > 15, l'angolo cercato doveva essere maggiore di 95° ed evidentemente un triangolo con due angoli ottusi non esiste.

In effetti possono esserci dei casi in cui il triangolo esiste, anzi ne esistono più di uno.

ESEMPIO

Vogliamo risolvere un triangolo di cui conosciamo le misure di due lati, 10 e 12 e dell'angolo opposto al lato minore, 42°.
Applichiamo la formula precedente

$$\text{sen}^{-1}\left(\frac{12 \cdot \text{sen}(42°)}{10}\right) \approx \text{sen}^{-1}(0{,}80) \approx 53°24'48''$$

Quindi in questo caso il triangolo esiste. Il terzo angolo misura circa 84°35'12".
Il terzo lato invece è:

$$\frac{10 \cdot \text{sen}(84°35'12'')}{\text{sen}(42°)} \approx 14{,}88$$

In effetti però abbiamo visto che angoli supplementari hanno lo stesso seno, pertanto si ha anche:

$$\text{sen}^{-1}(0{,}80) \approx 180° - 53°24'48'' = 126°35'12''$$

E, poiché 126°35'12" + 42° = 168°35'12", esiste anche questo triangolo, il cui terzo angolo misura 11°24'48" e perciò il terzo lato misura:

$$\frac{10 \cdot \text{sen}(11°24'48'')}{\text{sen}(42°)} \approx 2{,}96$$

Tenuto conto degli esempi precedenti possiamo enunciare la seguente regola:

REGOLA • *Dato un triangolo di cui sono noti due lati, a e b, e l'angolo opposto al secondo di essi,* β*, si ha:*

- *se* $\dfrac{a \cdot \text{sen}(\beta)}{b} > 1$ *il triangolo non esiste;*
- *se* $\dfrac{a \cdot \text{sen}(\beta)}{b} \le 1$ *e* $\alpha = \text{sen}^{-1}\left(\dfrac{a \cdot \text{sen}(\beta)}{b}\right) < \beta$ *esiste un solo triangolo;*
- *se* $\dfrac{a \cdot \text{sen}(\beta)}{b} \le 1$ *e* $\alpha = \text{sen}^{-1}\left(\dfrac{a \cdot \text{sen}(\beta)}{b}\right) > \beta$ *esistono due distinti triangoli.*

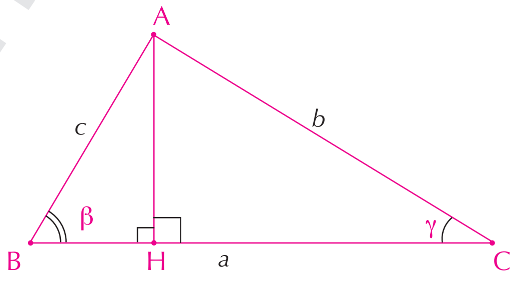
Con il teorema dei seni abbiamo visto che possiamo risolvere solo i triangoli che verificano il criterio ALA, dobbiamo perciò cercare qualche altra proprietà che permetta di risolvere i triangoli anche nelle ipotesi degli altri due criteri di isometria.
Vale il seguente **teorema**.

TEOREMA 10 (Teorema di Carnot o del coseno) • *In un triangolo ABC, il quadrato di un lato è la somma dei quadrati degli altri due lati, diminuita del doppio prodotto degli stessi lati per il coseno dell'angolo che essi formano. In simboli:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo un generico triangolo *ABC*, di cui tracciamo l'altezza *AH*, come mostrato in figura:



Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo *AHC* possiamo scrivere:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HC}^2$$

Per lo stesso teorema applicato al triangolo rettangolo *ABH* abbiamo invece:

$$\overline{AH}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BH}^2$$

Quindi, sostituendo: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BH}^2 + \overline{HC}^2$. Che possiamo anche scrivere:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BH}^2 + \left(\overline{BC} - \overline{BH}\right)^2 = \overline{AB}^2 - \cancel{\overline{BH}^2} + \overline{BC}^2 + \cancel{\overline{BH}^2} - 2\cdot\overline{BC}\cdot\overline{BH} =$$
$$= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\cdot\overline{BC}\cdot\overline{BH}$$

Del resto si ha anche: $\overline{BH} = \overline{AB}\cdot\cos(\beta)$. Sostituendo otteniamo appunto la tesi:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\cos(\beta) \Leftrightarrow b^2 = c^2 + a^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos(\beta)$$

Con il teorema di Carnot possiamo risolvere i triangoli nelle ipotesi dei criteri LAL e LLL.

ESEMPIO

Vogliamo risolvere un triangolo in cui due lati sono lunghi 10 e 11 unità e l'angolo da essi compreso è di 65°. Applicando il teorema di Carnot determiniamo il terzo lato: $\sqrt{10^2+11^2-2\cdot10\cdot11\cdot\cos(65°)} \approx 11{,}31$

Per determinare adesso le misure degli angoli possiamo usare indifferentemente il teorema dei seni oppure lo stesso teorema di Carnot. Nel primo caso avremo:

$$\frac{10}{\text{sen}(x)} \approx \frac{11{,}31}{\text{sen}(65°)} \approx \frac{11}{\text{sen}(y)} \Rightarrow x \approx \text{sen}^{-1}\left(\frac{10\cdot\text{sen}(65°)}{11{,}31}\right) \approx 53°15'27''$$

$$y = 180° - 65° - x \approx 61°44'33''$$

Nel secondo:

$$10^2 \approx 11^2 + 11{,}31^2 - 2\cdot11\cdot11{,}31\cdot\cos(x) = 248{,}9161 - 248{,}82\cdot\cos(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \approx \cos^{-1}\left(\frac{248{,}9161-100}{248{,}82}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{148{,}9161}{248{,}82}\right) \approx 53°14'18''$$

Ovviamente i risultati non coincidono perché i procedimenti hanno diversi gradi di approssimazione.