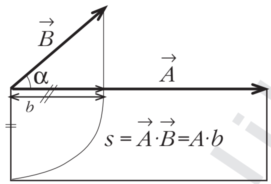
8) Prodotto scalare o prodotto interno

Si definisce **prodotto scalare** s di due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$, l'area del rettangolo che ha per lati il modulo del vettore $\vec{A}$ e la lunghezza della proiezione del vettore $\vec{B}$ sul vettore $\vec{A}$.



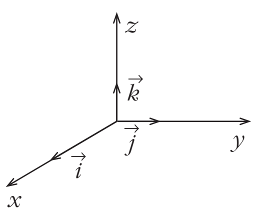
(Fig. 16)

Indicando con b la lunghezza della proiezione del vettore $\vec{B}$ su $\vec{A}$, dalla figura 16 si ha $s = A{\cdot}b$

(8.1) Se $\alpha < 90° \rightarrow b > 0 \rightarrow A \cdot b > 0$ il prodotto scalare è positivo
(8.2) Se $\alpha > 90° \rightarrow b < 0 \rightarrow A \cdot b < 0$ il prodotto scalare è negativo
(8.3) Se $\alpha = 0° \rightarrow b = B \rightarrow A \cdot b = A \cdot B$
(8.4) Se $\alpha = 90° \rightarrow b = 0 \rightarrow A \cdot b = 0$ il prodotto scalare è nullo

☑
Il prodotto scalare s dei vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ è dato da $s = AB\cos\alpha$.

Prodotto scalare tra i versori degli assi cartesiani



(Fig. 17)

Essendo $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ perpendicolari fra loro e di misura unitaria, dalla (8.3) e dalla (8.4) risulta che:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

8.1 Proprietà del prodotto scalare

(i) Il prodotto scalare è **commutativo**:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

(ii) Il prodotto scalare gode della **proprietà distributiva** rispetto alla somma:

$$\vec{C} \cdot \left(\vec{A} + \vec{B} \right) = \vec{C} \cdot \vec{A} + \vec{C} \cdot \vec{B}$$

8.2 Prodotto scalare di due vettori in funzione delle loro componenti

Dati due vettori:

$$\vec{A} = A_x \, \vec{i} + A_y \, \vec{j} \;\; \text{e} \;\; \vec{B} = B_x \, \vec{i} + B_y \, \vec{j}$$

il loro prodotto scalare s è:

$$s = \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$$

Dimostrazione

$$s = \vec{A} \cdot \vec{B} = \left(A_x \, \vec{i} + A_y \, \vec{j} \right) \cdot \left(B_x \, \vec{i} + B_y \, \vec{j} \right) = A_x B_x \, \vec{i} \cdot \vec{i} + A_x B_y \, \vec{i} \cdot \vec{j} + A_y B_x \, \vec{j} \cdot \vec{i} + A_y B_y \, \vec{j} \cdot \vec{j} =$$

$$= A_x B_x + A_y B_y$$

Esempio

Calcolare il prodotto scalare fra i vettori:

$$\vec{A} = 5\vec{i} + 7\vec{j}$$

$$\vec{B} = 4\vec{i} + 9\vec{j}$$

☑

Calcolare l'angolo compreso fra i due vettori.

Soluzione

$$s = A_x B_x + A_y B_y = (5 \cdot 4) + (7 \cdot 9) = 63$$

☑

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\alpha$$

quindi $\cos\alpha = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$, per cui:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{5^2 + 7^2} = 8{,}60$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{4^2 + 9^2} = 9{,}85$$

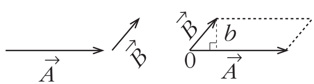
Sostituendo i valori trovati nella formula:

$$\cos\alpha = \frac{63}{8{,}60 \cdot 9{,}85} = 0{,}74$$

$$\alpha \cong 42°$$

9) Prodotto vettoriale o prodotto esterno

Due vettori applicati allo stesso punto individuano un parallelogramma di lati corrispondenti ai moduli dei due vettori.

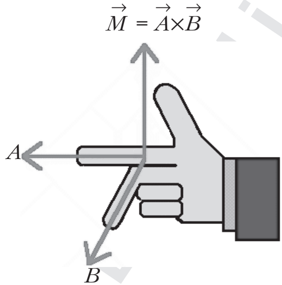


(Fig. 18)

Il **prodotto vettoriale** $\vec{p}$ tra due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ si indica con $\vec{A} \times \vec{B}$ e si legge A esterno B ed è un vettore che ha:

— direzione perpendicolare al piano formato dai due vettori;
— modulo pari all'area del parallelogramma definito dai due vettori;
— verso definito dalla **regola della mano destra** (indice = primo vettore; medio = secondo vettore; pollice = risultato) o della **vite destrorsa**.

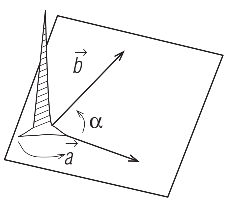
Regola della mano destra



(Fig. 19)

Disponendo le dita della mano destra come una terna di assi cartesiani e facendo corrispondere l'indice e il medio con le direzioni di $\vec{A}$ e $\vec{B}$, il momento ha la direzione del pollice.

Regola della vite destrorsa



(Fig. 20)

Il verso del prodotto vettoriale è quello di avanzamento di una vite destrorsa che ruota da $\vec{A}$ a $\vec{B}$, ed è:
— negativo se la rotazione avviene in senso orario;
— positivo se la rotazione avviene in senso antiorario.

Consideriamo la figura 18 in cui il parallelogramma è definito dai vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$.
Se indichiamo con b l'altezza del parallelogramma e con α l'angolo compreso tra i due vettori notiamo che il modulo del prodotto vettoriale $\vec{p}$ dei vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$, essendo uguale all'area del parallelogramma, è uguale a $p = A \cdot b$
☑
Dalla trigonometria si ha che:
$b = B$ senα e quindi
$p =$ AB senα
Inoltre:
(9.1) Se $\alpha = 0° \rightarrow b = 0 \rightarrow A \cdot b = 0$
(9.2) Se $\alpha = 90° \rightarrow b = B \rightarrow p = A \cdot B$

Prodotto tra i versori degli assi cartesiani

Dalla figura 17 si ha che, essendo $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ perpendicolari fra loro e di misura unitaria il loro prodotto esterno è dato da:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

9.1 Proprietà del prodotto vettoriale

(i) Il prodotto scalare è **anticommutativo**:

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

(ii) Il prodotto vettoriale gode della **proprietà distributiva** rispetto alla somma:

$$\vec{C}\times\left(\vec{A}+\vec{B}\right) = \vec{C}\times\vec{A}+\vec{C}\times\vec{B}$$

9.2 Prodotto vettoriale di due vettori in funzione delle loro componenti

Dati due vettori:

$$\vec{A} = A_x\,\vec{i}+A_y\,\vec{j} \quad \text{e} \quad \vec{B} = B_x\,\vec{i}+B_y\,\vec{j}$$

il loro **prodotto vettoriale** $\vec{p}$ è:

$$\vec{p} = \vec{A}\times\vec{B} = \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\vec{k}$$

Dimostrazione

$$\vec{A}\times\vec{B} = \left(A_x\,\vec{i}+A_y\,\vec{j}\right)\times\left(B_x\,\vec{i}+B_y\,\vec{j}\right) = A_xB_x\left(\vec{i}\times\vec{i}\right)+A_xB_y\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)+A_yB_x\left(\vec{j}\times\vec{i}\right)+$$

$$+A_yB_y\left(\vec{j}\times\vec{j}\right) = A_xB_y\,\vec{k}-A_yB_x\,\vec{k} = \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\vec{k}$$

Test di verifica

1. **Dati due vettori: $\vec{A} = 5\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$; $\vec{B} = 2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ il vettore differenza ha come componenti lungo gli assi rispettivamente 3 e 1.**

   ❑ **a)** vero ❑ **b)** falso

2. **Il vettore $\vec{A} = \vec{j}$ rappresenta il vettore unitario lungo l'asse x.**

   ❑ **a)** vero ❑ **b)** falso

3. **Il vettore OA ha componenti (5, 2). Il vettore OB ha componenti (2, 3). Il vettore somma ha componenti (8, 4).**

   ❑ **a)** vero ❑ **b)** falso

4. **Dati due vettori: $\vec{A} = 6\,\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{B} = 3\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ il vettore somma ha come modulo la radice quadrata della somma dei quadrati di 9 e di 4.**

   ❑ **a)** vero ❑ **b)** falso

5. ☑ **La formula seguente serve a determinare l'angolo che un vettore**

   $\vec{A} = A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j}$ **forma con l'asse x:** $\alpha = \text{arctan}\left(\dfrac{A_y}{A_x}\right)$

   ❑ **a)** vero ❑ **b)** falso

6. **Il prodotto di due vettori non nulli:**

   ❑ **a)** è uno scalare;
   ❑ **b)** non si può effettuare in quanto i vettori si possono sommare ma non moltiplicare;
   ❑ **c)** ha come risultato un vettore che giace su un piano verticale ai due vettori dati;